Matemáticas

Geometrías No Euclidianas

7º Semestre

Unidad 1. Axiomas de Hilbert

Clave
050941037

Universidad Abierta y a Distancia de México

DCEIT

Índice

Presentación 3

Competencia específica 3

Logros 3

1. Axiomas de Hilbert 3

1.1. Axiomas de intermediación 6

1.1.1. Una motivación 6

1.1.2. Los axiomas de intermediación 9

1.1.3. Consecuencia de los axiomas de intermediación 15

1.2. Axiomas de congruencia 21

1.2.1. Congruencia de segmentos 21

1.2.2. Congruencia de ángulos 23

1.3. Axiomas de continuidad 31

1.3.1. Una motivación 32

1.3.2. Axioma de Dedekind 34

1.4. Axioma de paralelismo 38

Cierre de la unidad 41

Para saber más 42

Fuentes de consulta 43

Presentación

En esta unidad se presentan los axiomas de Hilbert para la geometría euclidiana, la importancia de presentar de esta forma dicha geometría es para que comprendas la razón por la cual se enuncian, estos axiomas toman como modelo el plano, sin embargo, al cambiar de espacio tales axiomas ya no se cumplen, y los axiomas tienen que ser modificados para poder desarrollar una geometría en tal espacio. En muchos casos, estos axiomas resultan ser pequeñas variantes de los axiomas de Hilbert.

Competencia específica

Utilizar los axiomas de Hilbert, para la comprensión de los conceptos fundamentales de la geometría, mediante el planteamiento de problemas.

Logros

- Identificar la diferencia entre geometría Euclidiana y no Euclidiana.
- Determinar la negación del quinto postulado de Euclides.
- Resolver ejercicios aplicando propiedades de los axiomas de división y congruencia.
- Resolver ejercicios aplicando propiedades obtenidas de los axiomas de continuidad y paralelismo.
- Aplicar los axiomas de Hilbert en la solución de problemas geométricos.

1. Axiomas de Hilbert

Durante la primera mitad del siglo XVI se realizó una de las aportaciones más importantes a la geometría, se presentó por primera vez una geometría que difería de forma radical con la

geometría tradicional presentada en los Elementos de Euclides. Esta aportación liberó del molde tradicional a la geometría convirtiendo sus postulados en simples hipótesis cuya veracidad o falsedad no corresponde con la percepción física que tienen los sentidos. Se evidenció que los geómetras podían escoger sus postulados adecuadamente a su conveniencia, siempre y cuando formaran un sistema compatible y consistente, esta visión resultó tener gran impacto en la forma futura de ver las matemáticas.

En esta unidad se presenta una versión modificada de los axiomas de Hilbert, con ellos se presenta a la geometría de una manera intuitiva, en el espíritu de Euclides. Cabe mencionar que durante el primer cuarto del siglo XX Hilbert fue considerado como el más grande matemático en el mundo haciendo muchas aportaciones en varias áreas de las matemáticas y también en la física. Los axiomas de Hilbert están divididos en cinco grupos: la incidencia, la intermediación, la congruencia, la continuidad y el paralelismo.

La importancia de la incidencia radica en el hecho de que garantiza que existen los objetos indefinidos **punto** y **línea** que cumplen con las siguientes relaciones, cabe mencionar que existen otras "cosas" que también satisfacen dichos axiomas:

Axioma de incidencia 1: Para todo punto P y para todo punto Q Distinto de P existe una única línea ℓ que pasa por P y Q. Gráficamente se tiene lo siguiente:

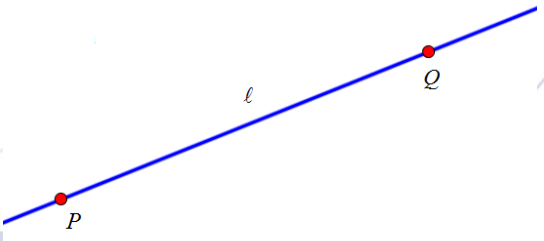

Figura 1.1. Axioma de Incidencia 1

Axioma de incidencia 2: para toda línea ℓ existen en ella al menos dos puntos distintos.

Axioma de incidencia 3: Existen tres puntos distintos de tal forma que no existe ninguna línea que pase por dichos puntos. Gráficamente se tiene lo siguiente:

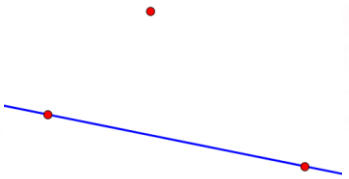

Figura 1.2. Axioma de Incidencia 2

Como consecuencia inmediata de estos axiomas se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.1. Dos líneas distintas en el plano tienen un punto en común o ninguno

Demostración: basta observar que si dos líneas tienen dos puntos en común el axioma de incidencia 1 garantiza que tiene que ser la misma. ■

El teorema anterior se representa gráficamente de la siguiente forma:

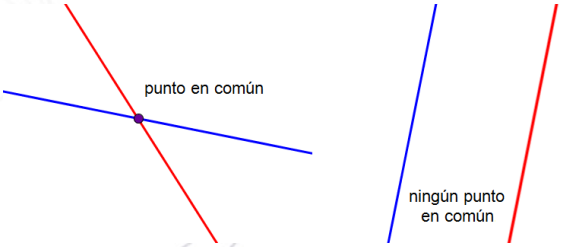

Figura 1.3. Dos rectas distintas se cortan en un punto o no se cortan

1.1. Axiomas de intermediación

Los axiomas de intermediación presentan la relación que hay entre una línea y los puntos que se localizan sobre ella. Permite definir, conceptos tales como segmentos, rayos, ángulos, interior de un ángulo e interior de un triángulo.

1.1.1. Una motivación

Para ilustrar la necesidad de enunciar los axiomas de intermediación se presenta la demostración del hecho que todo triángulo Isósceles tiene dos ángulos congruentes, esta demostración no es presentada por Euclides.

Teorema 1.2. Dado el triángulo ΔABC, si $AC \cong BC$ entonces $\measuredangle A \cong \measuredangle B$.

Demostración: considera los siguientes pasos:

(i). La bisectriz del $\measuredangle C$ corta al segmento AB en el punto D.

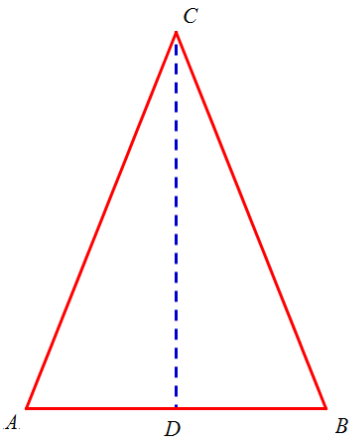

Figura 1.4. AD es la bisectriz de $\measuredangle C$

(ii). En los triángulos ΔACD y $\Delta \mathrm{BCD}$, por hipótesis se tiene que $AC \cong BC$.

(iii). Por definición de bisectriz se tiene que $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BCD$.

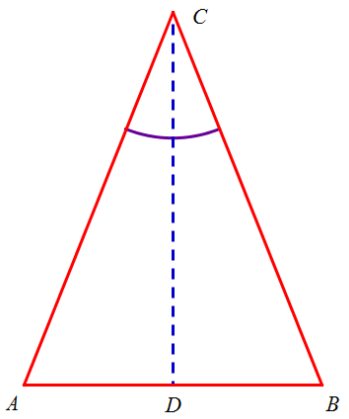

Figura 1.5. $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BCD$

(iv). Por definición de segmento no dirigido se tiene que $CD \cong DC$.

(v). Por el criterio de congruencia de triángulos segmento ángulo segmento se tiene que $\Delta ACD \cong \Delta BCD$.

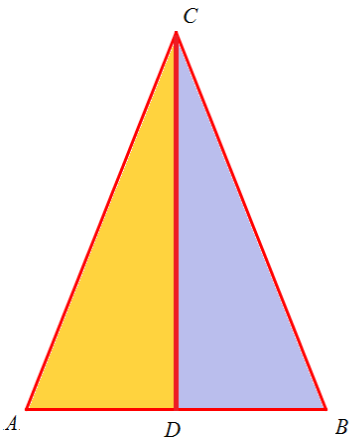

Figura 1.6. $\Delta ACD \cong \Delta BCD$

(vi). Como $\sphericalangle A$ se corresponde $\sphericalangle B$ en la congruencia $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ se tiene que $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$.

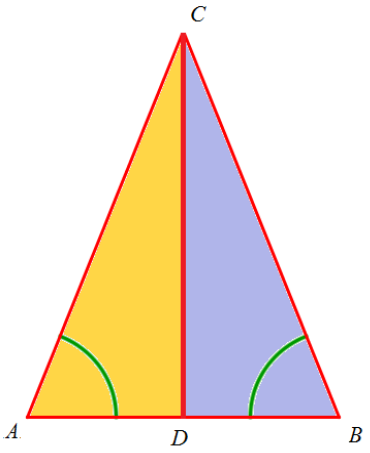

Figura 1.7. $\measuredangle A \cong \measuredangle B$

Lo que demuestra el teorema. ■

En el primer paso se utiliza el hecho de que todo ángulo tiene una bisectriz, este hecho es verdadero y su demostración se puede presentar por separado a esta prueba. Una primera pregunta que surge del proceso anterior es: ¿Cómo se sabe que la bisectriz del ángulo $\sphericalangle C$ intersecta a la recta $\overleftrightarrow{AB}$? , otra cuestión que surge de manera natural es: ¿Cómo se sabe que el punto D está "entre" los puntos A y B ? , es decir, ¿Por qué no se puede tener la siguiente figura?:

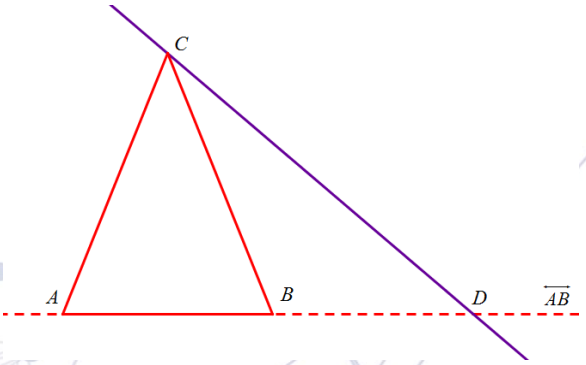

Figura 1.8. ¿Por qué una bisectriz no puede tener esta forma?

Estas dos preguntas tienen una aparente justificación obvia que es “por construcción”, pero en el sentido riguroso requiere de una demostración más formal.

Partiendo de que las preguntas anteriores son contestadas de tal forma que las afirmaciones anteriores son verdaderas, la prueba sólo garantiza que el ángulo $\measuredangle B$ es congruente al ángulo $\measuredangle CAD$ y no al ángulo $\measuredangle CAB$ porque en los triángulos ΔACD y ΔBCD el ángulo $\measuredangle CAD$ se corresponde con el ángulo $\measuredangle B$.

El objetivo de los axiomas de intermediación es evitar las ambigüedades que se presentan en argumentos que requieran ubicar la existencia de un objeto “entre” otros dos.

1.1.2. Los axiomas de intermediación

Antes de enunciar los axiomas de intermediación, para simplificar un poco la notación, dados tres puntos A, B y C, se denota por $A*B*C$ a la expresión “el punto B está entre el punto A y el punto C”, nótese que el término “entre” no es definido.

Axioma de intermediación 1: Si $A*B*C$ entonces los puntos A, B y C son distintos y están en la misma línea, y además $C*B*A$.

Observa que el axioma anterior plantea que es lo mismo decir si un punto B está “entre el punto A y el punto C” y decir “entre el punto C y el punto A”. Gráficamente se tiene lo siguiente:

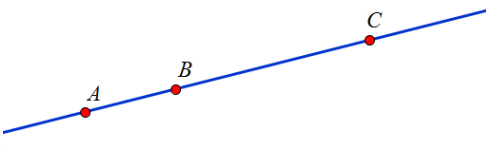

Figura 1.9. Axioma de Intermediación 1

Axioma de intermediación 2: Dados dos puntos distintos B y D existen tres puntos A, C y E que se encuentran en la línea $\overleftrightarrow{BD}$ tales que $A*B*D$, $B*C*D$ y $B*D*E$.

Este axioma afirma que dados dos puntos, existen puntos intermedios y que la línea que pasa por estos puntos no termina en ninguno de ellos. Gráficamente se tiene lo siguiente:

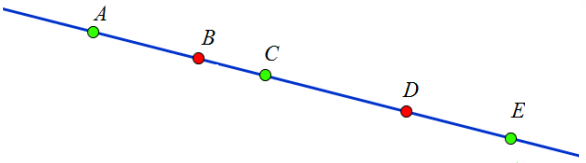

Figura 1.10. Axioma de Intermediación 2

Axioma de intermediación 3: Dados tres puntos distintos A, B y C que se encuentran en la misma línea entonces se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:

$$A*B*C \qquad B*A*C \qquad A*C*B$$

Es decir, hay uno y solo un punto entre los otros.

Este axioma afirma que una línea no puede ser cíclica, por ejemplo si tomamos una elipse, se tiene que un punto siempre está entre los otros dos puntos, como lo muestra la siguiente figura:

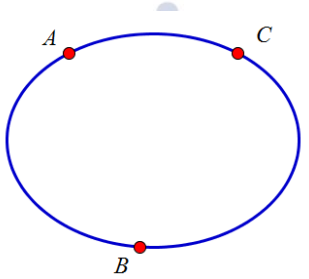

Figura 1.11. Una recta no puede ser cíclica

Los axiomas de intermediación permiten presentar los siguientes conceptos:

Definición: Dados dos puntos A y B, el **segmento** AB es el conjunto de todos los puntos que están entre el punto A y el punto B junto con ambos puntos. El **rayo** $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de todos los puntos en el segmento AB junto con todos los puntos C tales que $A*B*C$.

El axioma de intermediación 2 afirma que el rayo $\overrightarrow{AB}$ existe y que contiene al segmento AB. Los conceptos de rayo y segmento se ejemplifican en la siguiente figura:

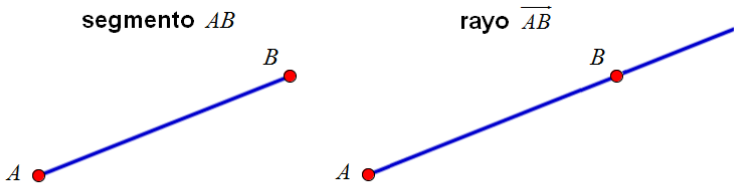

Figura 1.12. Segmento y Rayo

Otro concepto importante que se obtiene a partir de los axiomas de intermediación se presenta a continuación:

Definición: Dados tres puntos A, B y C tales que $C*A*B$, se dice que el rayo $\overrightarrow{AB}$ es **opuesto** al rayo $\overrightarrow{AC}$.

Tienes que observar que, por el axioma de incidencia 1 los puntos A, B y C son colineales y por el axioma de incidencia 3 se tiene que $C \notin \overrightarrow{AB}$ en consecuencia el rayo $\overrightarrow{AB}$ y su opuesto $\overrightarrow{AC}$ son distintos y finalmente el axioma de incidencia 2 garantiza que dado un rayo $\overrightarrow{AB}$ existe su rayo opuesto $\overrightarrow{AC}$. Gráficamente se tiene lo siguiente:

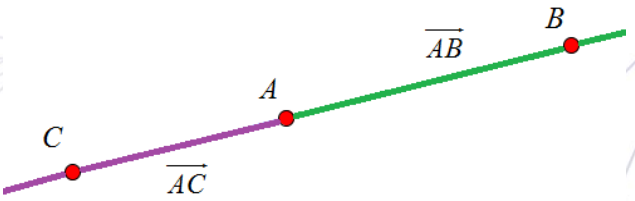

Figura 1.13. El rayo $\overrightarrow{AB}$ y su rayo opuesto $\overrightarrow{AC}$

A partir de lo anterior, es natural pensar que cuando A, B, C y P son cuatro puntos colineales, si $C*A*B$ entonces $P\in\overrightarrow{AB}\cup\overrightarrow{AC}$, esta propiedad toma el nombre de la **propiedad de separación**, es decir, el punto A separa la línea en dos partes, para muchos matemáticos éste también es un axioma, sin embargo, esta propiedad se deducirá de los axiomas previos y el siguiente axioma que se enunciará después de los siguiente conceptos:

Definición: Sean ℓ una línea cualquiera y un par de puntos A y B cualesquiera tales que $A,B\notin\ell$. Se dice que A y B **están del mismo lado** con respecto a ℓ si y sólo si $A=B$ o el segmento AB no contiene punto común con ℓ. En caso contrario, se dice que A y B **están en lados opuestos** con respecto a ℓ si y sólo si $A\neq B$ y el segmento AB contiene un punto común con ℓ.

De forma gráfica, los conceptos anteriores se presentan de la siguiente forma:

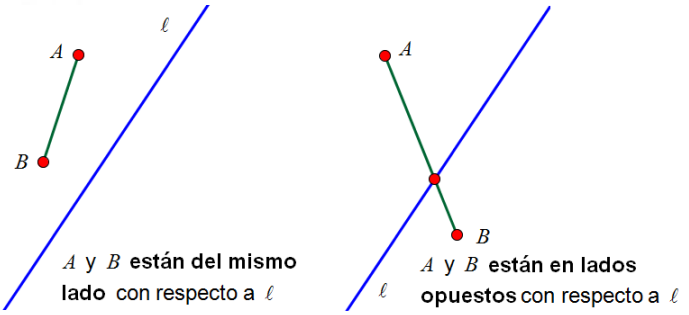

Figura 1.14. Comparación de dos puntos con respecto a una recta

El último axioma de esta sección es el siguiente:

Axioma de intermediación 4: Para toda línea ℓ y para cualesquiera tres puntos A, B y C tales que $A,B,C\notin\ell$ se tiene lo siguiente:

(i). Si A y B están del mismo lado con respecto a ℓ y los puntos B y C están del mismo lado con respecto a ℓ entonces A y C están del mismo lado con respecto a ℓ.

(ii). Si A y B están de lados opuestos con respecto a ℓ y los puntos B y C están de lados opuestos con respecto a ℓ entonces A y C están del mismo lado con respecto a ℓ.

Observa que este axioma garantiza que esta geometría es bidimensional ya que en el espacio tridimensional no se cumple dicha propiedad, además, si A y B son puntos que están en lados opuestos con respecto a una línea ℓ y los puntos B y C están del mismo lado con respecto a ℓ, entonces A y C están en lados opuestos con respecto a ℓ. Gráficamente, el axioma de intermediación 4, se representa en la siguiente figura:

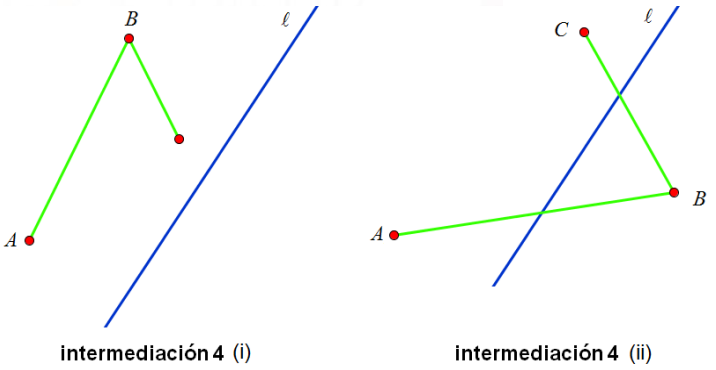

Figura 1.15. Axioma de Intermediación 4

El axioma de intermediación 4 permite presentar el siguiente concepto:

Definición: Dadas una línea ℓ y un punto A tales que $A \notin \ell$, un **lado** H_A de la línea ℓ es el conjunto de todos los puntos que están del mismo lado que A con respecto a ℓ.
Observa que si C es otro punto que esta del mismo lado que A con respecto a ℓ entonces $H_A = H_C$, además al lado de una línea ℓ también se le llama **semiplano acotado** por ℓ.
Gráficamente se tiene lo siguiente:

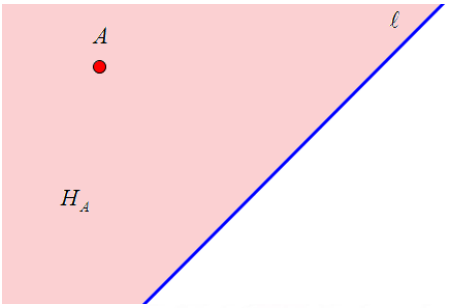

Figura 1.16. División de un plano por una línea

Finalmente, se presentan algunos conceptos relacionados con ángulos que se deducen de los axiomas de intermediación.

Definición: Dado una ángulo $\measuredangle CAB$ y un punto D, se dice que D es un **punto interior** del ángulo $\measuredangle CAB$ si y sólo si los puntos B y D están del mismo lado con respecto a la línea $\overleftrightarrow{AC}$ y los puntos C y D están del mismo lado con respecto a la línea $\overleftrightarrow{AB}$. Además, el **interior** de un ángulo es el conjunto de todos los puntos interiores del mismo.

Observa que el interior de un ángulo es la intersección de los semiplanos limitados por dos rectas. En la siguiente figura se muestra la idea detrás de la definición anterior:

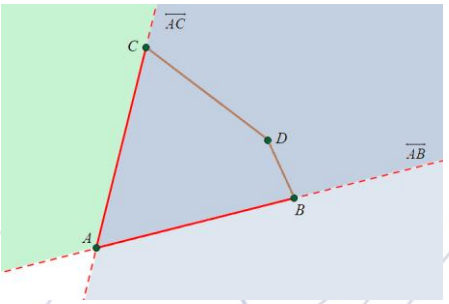

Figura 1.17. Interior de un ángulo

Definición: Se dice que el rayo $\overrightarrow{AD}$ **está entre** los rayos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ si y sólo si los rayos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ no son opuestos y el punto D es interior al ángulo $\measuredangle CAB$.

En la siguiente figura se muestra la idea de la definición anterior:

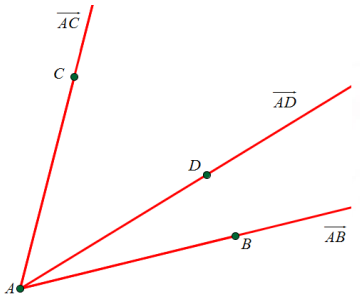

Figura 1.18. Rayo interior a un ángulo

Definición: El **interior** de un triángulo es la intersección de los interiores de sus ángulos internos. Además, un **punto exterior** a un triángulo, es un punto que no pertenece a su interior.

Gráficamente se tiene lo siguiente:

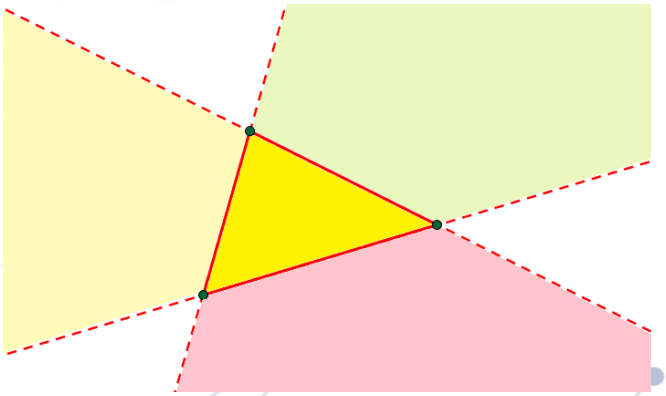

Figura 1.19. Interior de un triángulo

1.1.3. Consecuencia de los axiomas de intermediación

En la sección anterior se presentaron los axiomas de intermediación y algunas definiciones que se deducen a partir de los mismos, ahora se continúa enunciando algunos resultados que se obtienen como consecuencia casi inmediata de tales axiomas.

Proposición 1.3. Para cualesquiera dos puntos A y B se tiene que $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$.

Demostración: Basta seguir los siguientes pasos:

(i). Por definición de rayo se tiene que $AB \subset \overrightarrow{AB}$ y que $AB \subset \overrightarrow{BA}$.

(ii). Por definición de intersección de conjuntos se tiene que $AB \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

(iii). Sea $C \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$ se tiene que mostrar que $C \in AB$.

(iv). Si $C = A$ ó $C = B$ entonces es de los extremos del segmento AB. En otro caso, por el axioma de intermediación 3 se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

$$A*B*C \qquad A*C*B \qquad B*A*C$$

(v). Si $A*B*C$ entonces $C \notin \overrightarrow{BA}$, además $C*A*B$ entonces $C \notin \overrightarrow{AB}$, por consecuente $C \notin \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$.

(vi). En consecuencia se debe cumplir la relación $A*C*B$.

Lo que demuestra el resultado.■

La siguiente propiedad presenta la relación que hay entre los semiplanos acotados para una línea cualquiera.

Proposición 1.4. Toda línea acota exactamente dos semiplanos que no tienen puntos en común.

Demostración: Considera los siguientes argumentos:

(i). Sea ℓ una línea cualquiera.

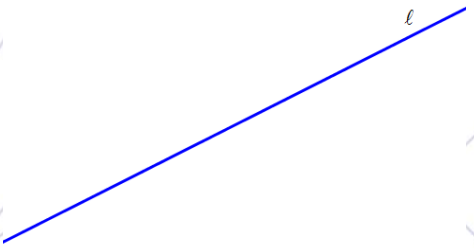

Figura 1.20. Línea ℓ

(ii). Por el axioma de incidencia 3, existe un punto A tal que $A \notin \ell$.

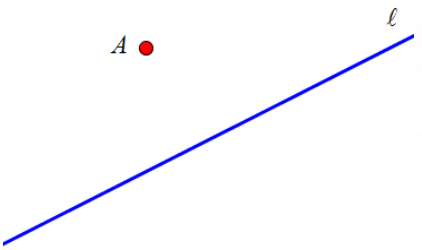

Figura 1.21. Punto A exterior a ℓ

(iii). Por el axioma de incidencia 2, existe un punto O tal que $O \in \ell$.

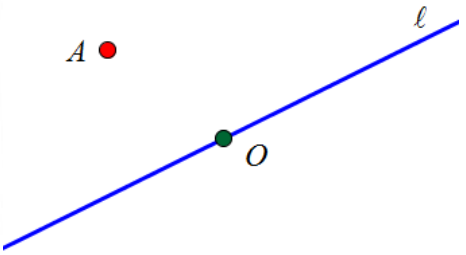

Figura 1.22. Punto O de ℓ

(iv). Por el axioma de intermediación 2, existe un punto B tal que $B*O*A$.

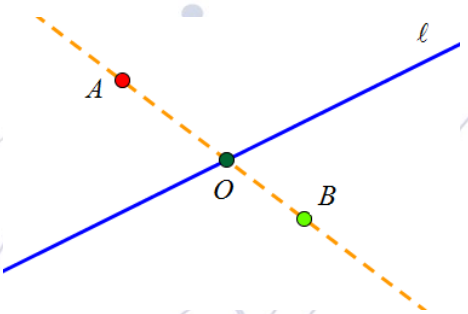

Figura 1.23. Punto B tal que $A*O*B$

(v). Por definición, los puntos A y B son opuestos con respecto a ℓ.

(vi). Sea C un punto tal que $C \notin \ell$, si C y B son opuestos con respecto a ℓ entonces A y C están del mismo lado con respecto a ℓ.

(vii). Luego se tiene que los puntos que no están sobre ℓ es la unión $H_A \cup H_B$.

(viii). Por contradicción: Si $C \in H_A \cap H_B$ entonces C esta del mismo lado que A con respecto a ℓ y C esta del mismo lado que B con respecto a ℓ, lo que implica que B y A están mismo lado que A con respecto a ℓ, lo que es una contradicción con el paso (v).

Lo que demuestra el resultado.■

Ahora se aplica la proposición anterior para estudiar la relación de intermediación que hay entre cuatro puntos colineales.

Proposición 1.5. Dados cuatro puntos A, B, C y D tales que $A*B*C$ y $A*C*D$ entonces $B*C*D$.

Demostración: Considera los siguientes argumentos:

(i). Por el axioma de intermediación 2, los puntos A, B, C y D son colineales, digamos que dicha línea es ℓ.

(ii). Existe un punto E tal que $E \notin \ell$.

(iii). La línea $\overleftrightarrow{EC}$ corta al segmento AD en C por consiguiente los puntos A y D son opuestos con respecto a $\overleftrightarrow{EC}$.

(iv). Se desea mostrar que A y B están del mismo lado con respecto a $\overleftrightarrow{EC}$.

(v). Por contradicción: Supóngase que A y B son opuestos con respecto a $\overleftrightarrow{EC}$.

(vi). Se tiene que la línea $\overleftrightarrow{AB}$ corta a la línea $\overleftrightarrow{EC}$ en algún punto entre A y B.

(vii). Como la línea $\overleftrightarrow{AB}$ es la misma que $\overleftrightarrow{AD}$ entonces, el punto donde $\overleftrightarrow{AB}$ corta $\overleftrightarrow{EC}$, por el Teorema 1.1 tiene que ser C.

(viii). Por consiguiente $A*B*C$ y $A*C*B$ lo que contradice el axioma de intermediación 3.

(ix). Esto implica que A y B están del mismo lado con respecto a $\overleftrightarrow{EC}$.

(x). Luego B y D son opuestos con respecto a $\overleftrightarrow{EC}$.

(xi). En consecuencia el punto C, que es la intersección entre las líneas $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{EC}$, está entre los puntos B y D.

Lo que demuestra el resultado.■

Ahora se presenta la propiedad de la línea de separación:

Proposición 1.6. Dados tres puntos A, B y C tales que $C*A*B$, se denota por ℓ a la línea que pasa por los puntos A, B y C, entonces para todo $P \in \ell$ se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones: $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ó $P \in \overleftrightarrow{AC}$.

Demostración: Considera el siguiente argumento:

(i). Dado $P \in \ell$ y el rayo $\overleftrightarrow{AB}$ entonces se tiene una y sólo una de las siguientes relaciones: $P \in \overleftrightarrow{AB}$ ó $P \notin \overleftrightarrow{AB}$.

(ii). Si $P \in \overleftrightarrow{AB}$ entonces no hay nada que demostrar.

(iii). Si $P \notin \overleftrightarrow{AB}$, entonces por el axioma de intermediación 3 se tiene que $P*A*B$.

(iv). Si $P = C$ entonces por definición se tiene que $P \in \overleftrightarrow{AC}$, lo que concluye la prueba.

(v). Cuando $P \neq C$, el axioma de intermediación 3 garantiza que se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones:

$$C*A*P \qquad C*P*A \qquad P*C*A$$

(vi). Por contradicción: Supóngase que $C*A*P$ implica que se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

$$P*C*B \qquad C*P*B \qquad P*B*C$$

(vii). Supóngase que $P*B*C$ y combinándola con la relación $P*A*B$ implica que $A*B*C$, esto contradice la hipótesis $C*A*B$.

(viii). Si $C*P*B$ y combinándola con la relación $P*A*C$ implica que $A*P*B$, contradiciendo el paso (iii).

(ix). Supóngase que $B*C*P$ y combinándola con la relación $B*A*P$ implica que $A*C*P$ contradiciendo el paso (vi).

(x). Los pasos (vii)-(ix) garantizan que no se cumple $C*A*P$.

(xi). Por consiguiente se cumplen alguna de las condiciones: $C*P*A$ ó $P*C*A$.

(xii). Por definición $P \in \overrightarrow{AC}$.

Lo que demuestra el resultado.■

El siguiente resultado, conocido como el Teorema de Pach, fue descubierto y utilizado por Euclides sin realizar una demostración de su validez.

Teorema 1.7. Si A, B y C son tres puntos no colineales distintos y ℓ es cualquier línea que intersecta al segmento AB en un punto intermedio entre A y B entonces ℓ también intersecta a alguno de los segmentos AC ó BC. Si $C \notin \ell$ entonces ℓ no intersecta simultáneamente a AC y BC.

Demostración: Considera los siguientes pasos:

(i). Se tiene que $C \in \ell$ ó $C \notin \ell$.

(ii). Si $C \in \ell$ no hay nada que mostrar.

(iii). Supóngase que $C \notin \ell$.

(iv). Por hipótesis $A, B \notin \ell$ y el segmento AB intersecta a ℓ.

(v). Lo que implica que A y B están en lados opuestos con respecto a ℓ.

(vi). Si C y A están del mismo lado con respecto a ℓ entonces C y B están en lados opuestos con respecto a ℓ en consecuencia ℓ intersecta al segmento BC.

(vii). Si C y B están del mismo lado con respecto a ℓ entonces C y A están en lados opuestos con respecto a ℓ en consecuencia ℓ intersecta al segmento AC.

Lo que muestra la validez de este resultado.

1.2. Axiomas de congruencia

Este conjunto de axiomas presenta las relaciones que hay entre líneas y ángulos, estas relaciones toman el nombre de "congruencia", para denotar la congruencia entre dos objetos se utiliza el símbolo $\cong$, por ejemplo, el símbolo $AB \cong CB$ significa que el segmento AB es congruente con el segmento CD.

1.2.1. Congruencia de segmentos

Se comienza presentando los axiomas de congruencia relacionados con segmentos.

Axioma de congruencia 1: Si A y B son dos putos distintos y si A' es cualquier otro punto, entonces para cada rayo r que inicia en A' existe un único punto B' de tal manera que $AB \cong A'B'$.

De forma intuitiva, este axioma garantiza que un segmento se puede "mover" poniendo el punto A sobre el punto A' y B sobre B', gráficamente se tiene lo siguiente:

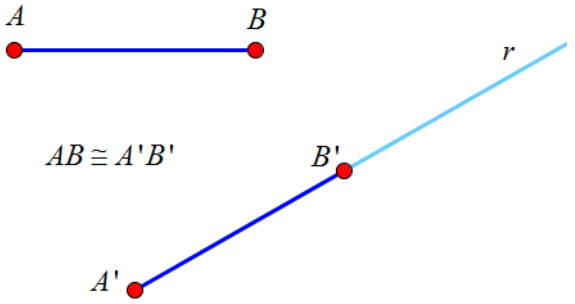

Figura 1.24. Axioma de Congruencia 1

Axioma de congruencia 2: Dados segmentos AB, CD y EF tales que $AB \cong CD$ y $AB \cong EF$ entonces $CD \cong EF$. Más aún, para todo segmento AB se tiene que $AB \cong AB$.

Este axioma afirma que dos segmentos congruentes a un tercero, son congruentes entre sí.

Axioma de congruencia 3: Dados los puntos A, B, C, A', B' y C' tales que $A*B*C$ y $A'*B'*C'$. Si $AB \cong A'B'$ y $BC \cong B'C'$ entonces $AC \cong A'C'$.

En la siguiente figura, se presenta la idea que está detrás de este axioma:

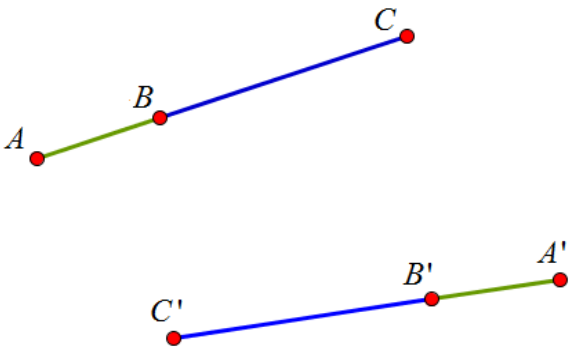

Figura 1.25. Axioma de Congruencia 3

Este axioma afirma que si segmentos congruentes son "sumados" a segmentos congruentes, entonces su "suma" es congruente. En este caso, cuando se habla de sumar dos segmentos significa que tales segmentos se yuxtaponen sobre la misma línea, es decir, sobre la misma línea donde termina un segmento comienza el otro. Gráficamente, la suma dos segmentos se presenta de la siguiente manera:

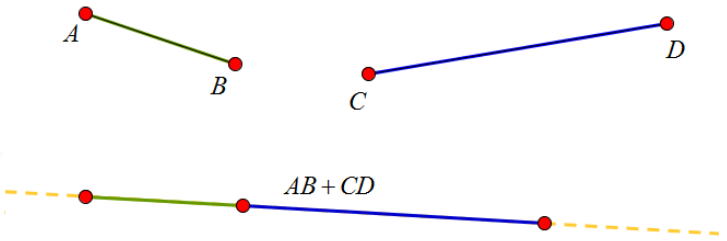

Figura 1.26. Suma de segmentos

Dado un segmento AB se puede sumar dos, tres, cuatro,..., n-veces dicho segmento consigo mismo, para obtener el segmento nAB. Gráficamente, se tiene lo siguiente:

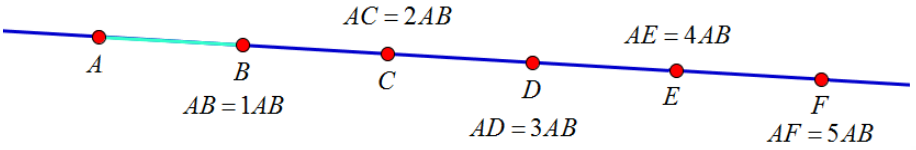

Figura 1.27. Múltiplos escalares de un segmento

1.2.2. Congruencia de ángulos

Ahora toca el turno de presentar los axiomas de congruencia relacionados con ángulos, la primera es la versión para ángulos del axioma de congruencia 1.

Axioma de congruencia 4: Dados cualquier ángulo $\measuredangle BAC$ y un rayo cualquiera $\overrightarrow{A'B'}$ que inicie de A', entonces existe un único rayo $\overrightarrow{A'C'}$ sobre algún lado de la línea $\overleftrightarrow{A'B'}$ tal que $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$.

Este axioma plantea que dado un ángulo este puede ser ubicado sobre el lado de un rayo dado de manera única, como se muestra en la siguiente figura:

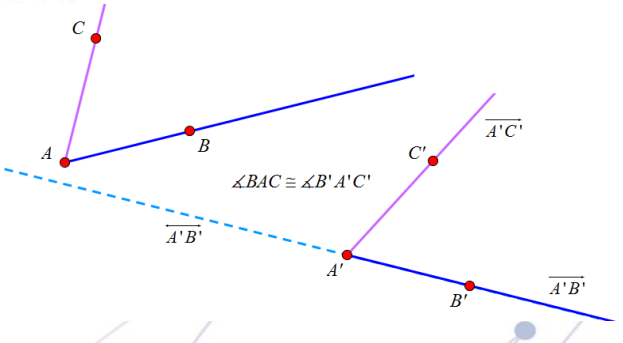

Figura 1.28. Axioma de Congruencia 4

El siguiente axioma, es la analogía para ángulos del axioma de congruencia 2:

Axioma de congruencia 5: Supóngase que $\measuredangle A \cong \measuredangle B$ y que $\measuredangle A \cong \measuredangle C$ entonces $\measuredangle B \cong \measuredangle C$, además $\measuredangle A \cong \measuredangle A$ para cualquier ángulo $\measuredangle A$.

Este axioma afirma que si dos ángulos son congruentes a un tercero, éstos son congruentes entre sí. Como consecuencia inmediata se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.8. Si $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$ entonces $\sphericalangle B \cong \sphericalangle A$.

Demostración: Por hipótesis $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$, luego como $\sphericalangle A \cong \sphericalangle A$, por el axioma de congruencia 3 se tiene que $\sphericalangle B \cong \sphericalangle A$. ■

El siguiente axioma es la versión para ángulos del axioma de congruencia 3, también conocido como el criterio de congruencia de triangulo lado-ángulo-lado (LAL).

Axioma de congruencia 6: Si dos lados y un ángulo interior de un triángulo son congruentes respectivamente a dos lados y un ángulo interno de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

El criterio anterior, es un axioma profundo, establece la relación que existe entre la congruencia de segmentos y la congruencia de ángulos. Además, esta propiedad permite deducir todos los resultados básicos acerca de la congruencia de triángulos, los cuales son hasta cierto punto familiares. En la siguiente figura se ilustra el axioma de congruencia 6:

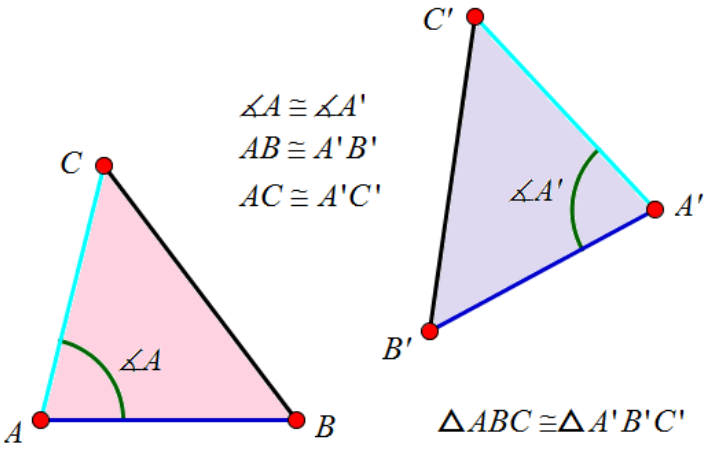

Figura 1.29. Axioma de Congruencia 6

Como consecuencia inmediata del axioma de congruencia 6 es que un triángulo puede sobreponerse en un segmento y un semiplano dados, la prueba de este hecho se presenta a continuación:

Proposición 1.9. Dados un triángulo ΔABC y los puntos D y E tales que $DE \cong AB$, existe un punto F que no pertenece a la línea $\overleftrightarrow{DE}$ tal que $\Delta ABC = \Delta DEF$.

Demostración:

Hay que seguir los siguientes pasos:

(i). Sean dos puntos D y E tales que $DE \cong AB$.

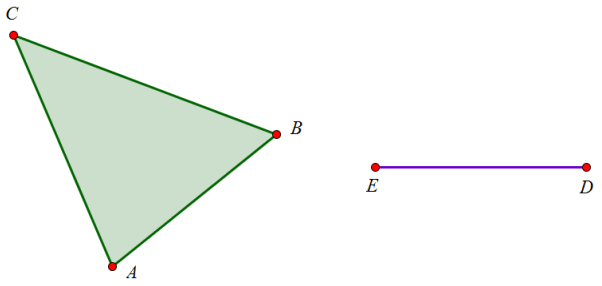

Figura 1.30. Segmento ED congruente con AB

(ii). Por el axioma de congruencia 4 existe un único rayo $\overrightarrow{DG}$ tal que $\measuredangle CAB \cong \measuredangle GDE$.

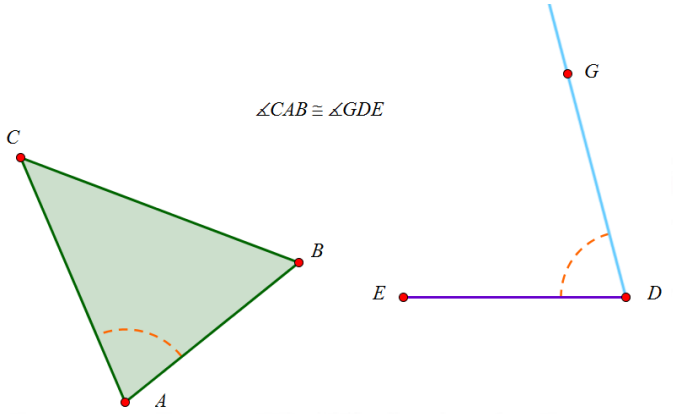

Figura 1.31. Rayo $\overrightarrow{DG}$ que satisface $\measuredangle CAB \cong \measuredangle GDE$

(iii). El axioma de congruencia 1 permite escoger el punto F sobre el rayo DG de tal manera que $AC \cong DF$.

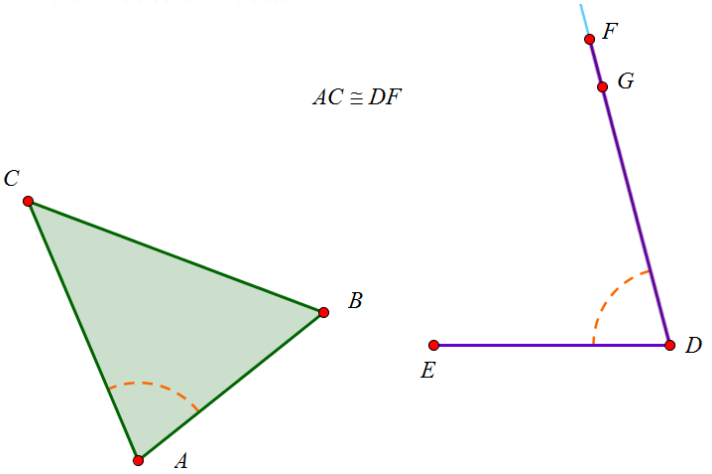

Figura 1.32. Punto F tal que $AC \cong DF$

(iv). Dado que $\measuredangle CAB \cong \measuredangle CAB$, $DE \cong AB$ y $AC \cong DF$, el axioma de congruencia 6 garantiza que $\triangle ABC = \triangle DEF$.

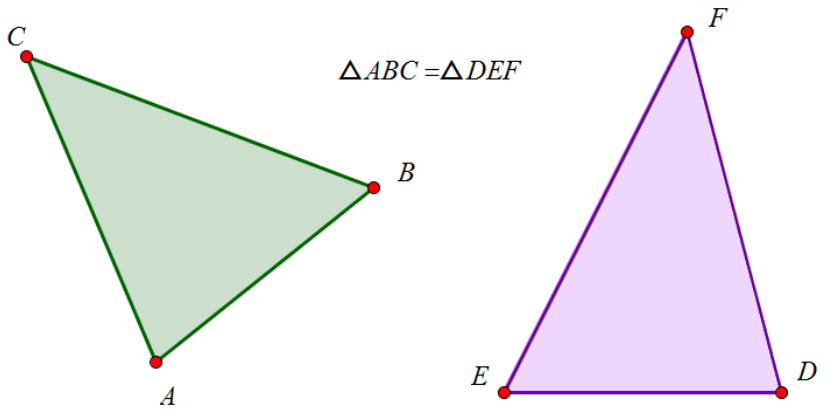

Figura 1.33.

$\Delta CAB \cong \Delta FED$, $DE \cong AB$ y $AC \cong DF$

Lo que muestra el resultado.■

El resultado anterior se le conoce como **criterio de congruencia de triángulos LAL** (lado ángulo lado). Cabe mencionar que Euclides no toma al criterio LAL como un axioma, su argumento consiste en lo siguiente: Supóngase que $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$, $AB \cong A'B'$ y $AC \cong A'C'$, mover el triángulo $\Delta A'B'C'$ de tal forma que el punto A' coincida con A y el segmento AB coincida con $A'B'$, dado que $AB \cong A'B'$ entonces el punto B' coincide con B, dado que $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$, los rayos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{A'C'}$ coinciden, luego como $AC \cong A'C'$ entonces el punto C' coincide con C, por consiguiente $B'C'$ coincide con BC juntos con los ángulos restantes, lo que implica que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

El argumento previo toma el nombre de **superposición**, éste se deriva de la experiencia de dibujar dos triángulos sobre una hoja de papel, cortando uno y sobreponiéndolo en el otro. Sin embargo, a pesar de que este camino es convincente, no resulta ser una prueba rigurosa.

Una aplicación directa del criterio LAL es el siguiente resultado para triángulos isósceles obtenido por Pappus.

Proposición 1.10. Si en un triángulo ΔABC se tiene que $AB \cong AC$ entonces $\measuredangle B \cong \measuredangle C$.

Demostración: Basta observar los siguientes pasos:

(i). Considera las siguientes correspondencia de ángulos $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ y $C \leftrightarrow B$.

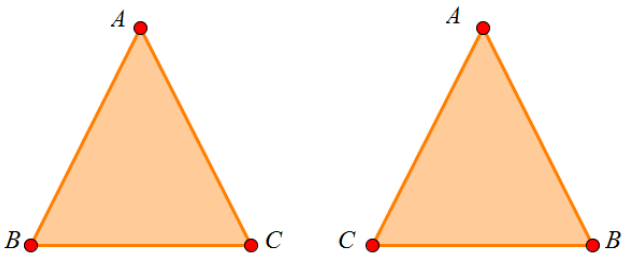

Figura 1.34. Triángulos ΔABC y ΔACB

(ii). Por hipótesis $AB \cong AC$ y por el axioma de congruencia 5 $\measuredangle A \cong \measuredangle A$.

(iii). Luego, los triángulos ΔABC y ΔABC tienen un ángulo interno congruente y sus respectivos lados son congruentes.

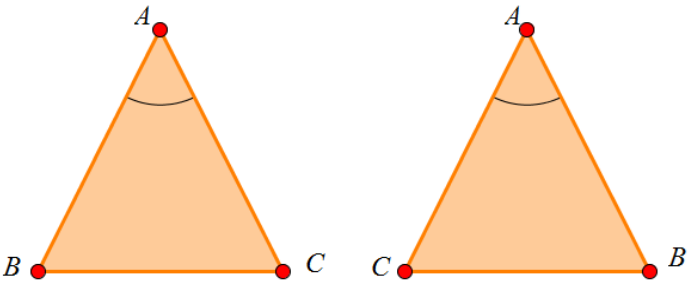

Figura 1.35. $\measuredangle BAC \cong \measuredangle CAB$

Por el axioma de congruencia 6 se tiene que $\Delta ABC \cong \Delta ACB$.

(iv). En consecuencia $\measuredangle B \cong \measuredangle C$.

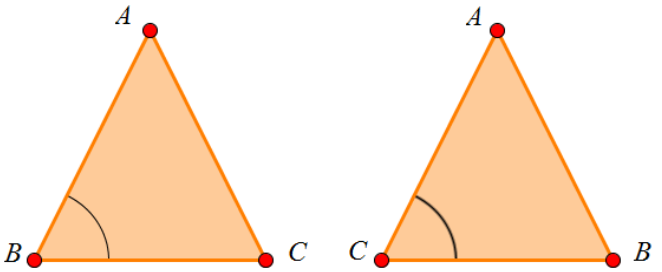

Figura 1.36. $\measuredangle B \cong \measuredangle C$.

Lo que demuestra el resultado.■

El siguiente resultado relaciona la congruencia de un segmento con los puntos intermedios del mismo.

Proposición 1.11. Dados $AC \cong DF$, entonces para todo B tal que $A*B*C$ existe un único punto E que satisface $D*E*F$ y $AB \cong DE$.

Demostración: Hay que seguir los siguientes pasos:

(i). Por el axioma de congruencia 1 existe un único punto E en el rayo $\overrightarrow{DF}$ tal que $AB \cong DE$.

(ii). Se procede por contradicción, supóngase que el punto E no está entre los puntos C y D.

(iii). Por la definición del rayo $\overrightarrow{DF}$ se tiene que $E = F$ ó $D*F*E$.

(iv). Si $E = F$ entonces B y C son dos puntos distintos en el rayo $\overrightarrow{AC}$ tal que $AC \cong DF \cong AB$, lo que contradice el axioma de congruencia 1.

(v). Si $D*F*E$ entonces el axioma de congruencia 1 garantiza que hay un punto G en el rayo opuesto a $\overrightarrow{CA}$ tal que $FE \cong CG$.

(vi). Por el axioma e congruencia 3 se tiene que $AG \cong DE$.

(vii). Es decir, hay dos puntos B y G sobre el rayo $\overrightarrow{AC}$ tales que $AG \cong DE \cong AB$, lo que contradice el axioma de congruencia 1.

(viii). En consecuencia $D*E*F$.

Lo que demuestra el resultado.■

Gráficamente, el resultado anterior se presenta de la siguiente forma:

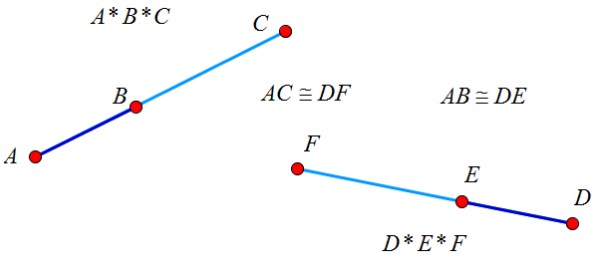

Figura 1.37. Imagen que ejemplifica la Proposición 1.11

Finalmente, se presenta cómo comparar segmentos que no son congruentes:

Definición: Dados dos segmentos AB y CD, se denota por $AB<CD$ o $CD>AB$ si y sólo si existe un punto E tal que $C*E*D$ y satisface $AB\cong CE$.

La siguiente figura presenta la esencia detrás de la definición anterior:

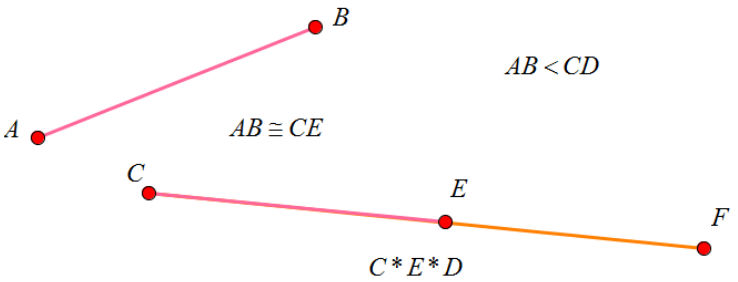

Figura 1.38. Imagen que ejemplifica $AB<CD$

El siguiente resultado muestra las propiedades que tiene la relación $<$:

Proposición 1.12. La relación $<$ satisface las siguientes relaciones:

(a) Dados dos segmentos AB y CD se tiene una y sólo una de las siguientes relaciones:

$AB<CD$ ó $AB\cong CD$ ó $AB>CD$.

(b) Si $AB<CD$ y $CD\cong EF$ entonces $AB<EF$.

(c) Si $AB < CD$ y $CD < EF$ entonces $AB < EF$.

Demostración: Para obtener (a) hay que seguir los siguientes pasos

(i). Sean AB y CD dos segmentos.

(ii). Por el axioma de congruencia 1 existe un punto E en el rayo línea $\overrightarrow{CD}$ tal que $AB \cong CE$.

(iii). Si $E = F$ entonces $AB \cong CF$. En

(iv). Si $E \neq F$, el axioma de intermediación 3 garantiza que se cumple una y sólo una de las condiciones: $C*E*D$ ó $C*D*E$.

(v). si $C*E*D$ entonces $AB < CD$.

(vi). Si $C*D*E$ entonces $CD < AB$.

Para (b) hay que seguir los siguientes pasos:

(i). Como $AB < CD$ implica que existe G tal que $C*G*F$ y $AB \cong CG$.

(ii). Por hipótesis $CD \cong EF$, la Proposición 1.11. existe un punto H tal que $E*H*F$ y $AB \cong CG \cong EH$.

(iii). Por consiguiente $AB < EF$.

Para (c) se tiene lo siguiente:

(i). Como $AB < CD$ y $CD < EF$ existen dos puntos G y H tales que $C*G*D$ y $E*H*F$ que satisfacen $AB \cong CG$ y $CD \cong EH$.

(ii). Por la Proposición 1.11. existe I tal que $E*I*H$ y satisface $AB \cong CG \cong EI$.

(iii). Por consiguiente $AB < EF$.

Lo que demuestra el resultado.■

1.3. Axiomas de continuidad

El axioma de continuidad es necesario ya que permite llenar algunos huecos que se presentan en los Elementos de Euclides con respecto al trazo de segmentos y líneas. Este axioma permite representar a los números reales como puntos de en una línea, esto garantiza que existe un

sistema de coordenadas para abordar a la geometría, este camino se conoce como geometría analítica.

1.3.1. Una motivación

Antes de enunciar el axioma de continuidad, se presenta una breve motivación de la necesidad de enunciar dicho axioma, éste se obtiene de la Proposición 1 de los elementos de Euclides

Proposición 1.13. Dado cualquier segmento, hay un triángulo equilátero que tiene como lados segmentos congruentes al segmento dado.

Demostración: La siguiente es la prueba presentada por Euclides en sus Elementos, la cual se desarrolla en los siguientes pasos:

(i). Sea AB un segmento dado.

Figura 1.39. Segmento AB

(ii). Con centro en A y radio la longitud de AB se traza el círculo C_1.

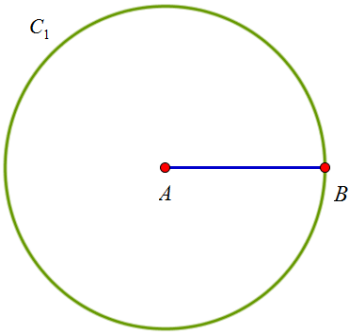

Figura 1.40. Círculo con centro en A y radio AB

(iii). Con centro en B y radio la longitud de AB se traza el círculo C_2.

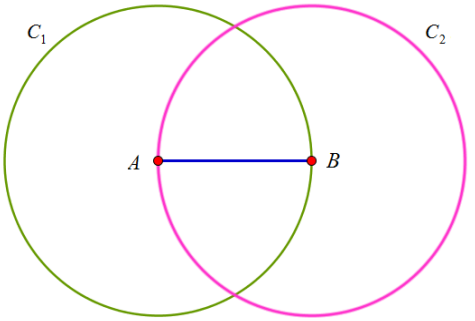

Figura 1.41. Círculo con centro en B y radio AB

(iv). Los círculos C_1 y C_2 se intersectan en el punto C.

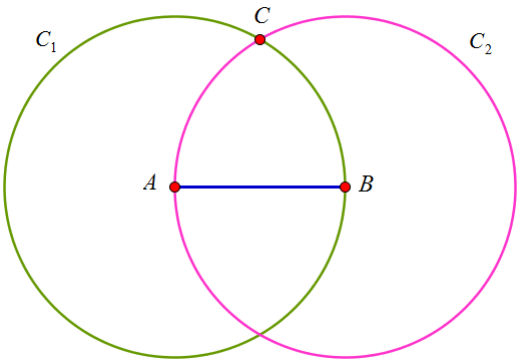

Figura 1.42. Punto C intersección de los círculos C_1 y C_2

(v). Se trazan los segmentos CA y CB.

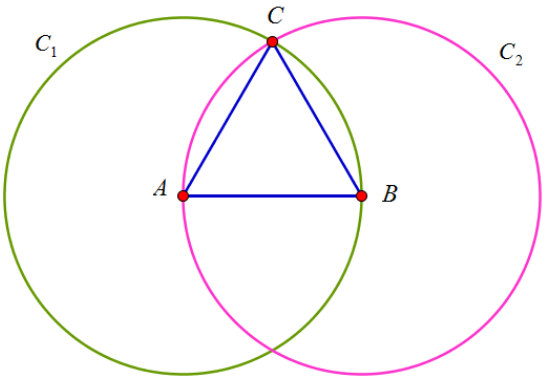

Figura 1.43. Triángulos ΔABC

(vi). Como A es el centro del círculo C_1 se tiene que $AB \cong CA$.

(vii). Como B es el centro del círculo C_2 se tiene que $AB \cong CB$.

(viii). Luego, se tiene que $CA \cong CB$.

(ix). Por consiguiente, el triángulo ΔABC es equilátero.

Lo que demuestra el resultado.■

En apariencia, la demostración anterior no tiene ninguna objeción, sin embargo hay un pequeña observación en el paso (iv), el cual explícitamente plantea la existencia del punto C que es la intersección de las circunferencias C_1 y C_2.

En concreto, la cuestión es la siguiente: ¿Cómo se conoce que el punto C existe?, puedes creer que la respuesta es afirmativa por el hecho de que el punto C existe por la figura presentada, pero no es válido utilizar dicha figura para justificar este hecho. Hay que aclarar que no se está diciendo que los círculos construidos no se cortan entre sí, sólo se está mostrando la razón por la cual es necesario plantear otro axioma que resuelva esta situación.

1.3.2. Axioma de Dedekind

El axioma de Dedekind es el que toma Hilbert para argumentar las cuestiones relacionadas con la continuidad.

Axioma de continuidad: Sea $\{l\}$ el conjunto de todos los puntos de la línea ℓ, supóngase que $\{l\}$ es la unión de dos conjuntos disjuntos no vacíos Σ_1 y Σ_2, es decir, $\Sigma_1, \Sigma_2 \neq \varnothing$, $\{l\} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ y $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$ de tal forma que un elemento de Σ_1 no este entre dos elementos de Σ_2 y viceversa. Entonces existe un único punto O de ℓ tal que Σ_1 es un rayo que inicia en O y Σ_2 es su rayo opuesto.

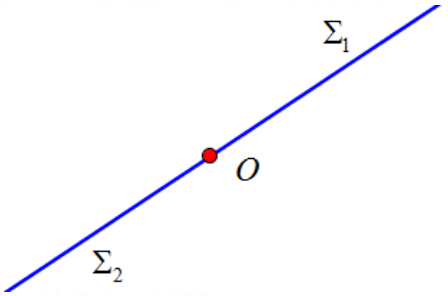

Figura 1.44. Axioma de Continuidad

Recuerda que la propiedad de separación de una línea afirma que un punto sobre esta línea separa a la línea en dos partes una de un lado y la otra del otro. El axioma de Dedekind es el inverso a esta propiedad, ya que afirma que cualquier separación de una línea que puede verse de un lado y de otro es provocada por un punto. Los conjuntos Σ_1 y Σ_2 con las características presentadas en el enunciado del axioma toman el nombre de **cortadura de Dedekind** de la línea.

La esencia detrás del axioma de Dedekind es garantizar que la línea no tenga **huecos** en el sentido de que cualquier punto O sobre ℓ y cualquier número real positivo x existen un par de números únicos P_{-x} y P_{+x} tales que $P_{-x} * O * P_{+x}$ y $OP_{-x} \cong OP_{+x}$ donde la longitud de OP_{-x} y OP_{+x} es igual a x.

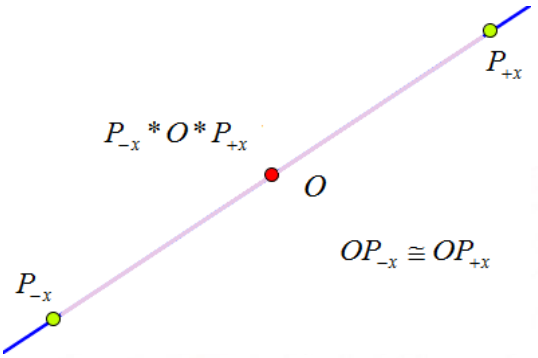

Figura 1.45. Representación de un número en una línea

Si el axioma de Dedekind no garantiza construir un segmento de longitud dada, por ejemplo un segmento que tenga longitud $\sqrt{2}$, con este axioma garantiza que se puede introducir un **sistema rectangular de ejes coordenados** y desarrollar la rama de las matemáticas conocida como **geometría analítica** que fue descubierta por René Descartes y Pierre de Fermat en el siglo XVII. Con este sistema de coordenadas permiten mostrar que los axiomas de la geometría euclidiana son "categóricos" en el sentido de que el sistema de estos axiomas tiene un modelo único salvo isomorfismo, que algunos matemáticos suelen llamar **Plano Coordenado Cartesiano** usual de todas las parejas ordenadas de números reales.

El axioma de Dedekind implica cuatro propiedades que se obtienen por medio de algunos argumentos de construcción, tales propiedades son las siguientes:

(a) **Principio de continuidad circular:** Si un círculo C_1 pasa por el punto interior y uno exterior de otro círculo C_2 entonces los círculos C_1 y C_2 se intersectan en dos puntos.

Para una circunferencia con centro en O y radio OR se dice que un punto P es **interior** a la circunferencia si y solo si $OP < OR$, de forma similar se dice que P es **exterior** si y sólo sí $OP > OR$. La siguiente figura bosqueja el principio de continuidad circular:

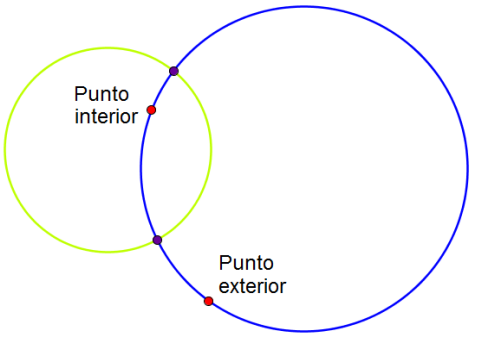

Figura 1.46. Principio de Continuidad Circular

(b) **Principio de continuidad elemental:** Si un punto final de un segmento está dentro de un círculo y el otro extremo esta fuera, entonces el segmento y la circunferencia se intersectan en un punto.

Gráficamente, se tiene lo siguiente:

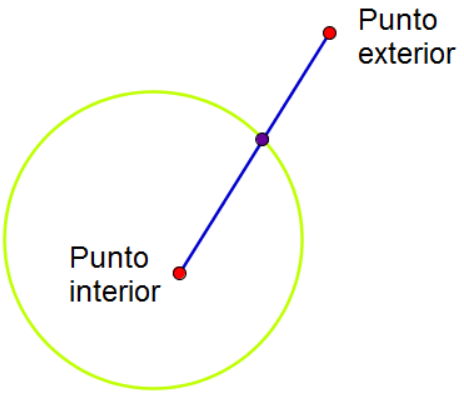

Figura 1.47. Principio de Continuidad Elemental

(c) **Axioma de Arquímedes:** Si CD es un segmento, A es cualquier punto y r es cualquier rayo que comienza en A entonces para todo $B \neq A$ sobre r hay un número n tal que existe un punto E en el rayo r tal que $nCD = AE$ y se cumple que $E = B$ ó $A*B*E$.

El contenido intuitivo del axioma de Arquímedes es que si se escoge un segmento CD como unidad de longitud, entonces cualquier otro segmento tiene longitud finita con

respecto a este, además este axioma no es puramente geométrico ya que afirma la existencia del concepto de número. Gráficamente se tiene lo siguiente:

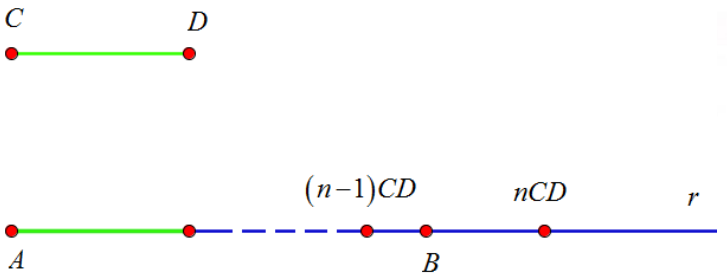

Figura 1.48. Axioma de Arquímedes

(d) **Axioma de Aristóteles:** Dado cualquier lado de un ángulo agudo $\measuredangle DCE$ y cualquier segmento AB, existe un punto Y sobre el rayo $\overrightarrow{CD}$ tal que si X es el punto base de la perpendicular al rayo $\overrightarrow{CE}$ que pasa por Y entonces $XY > AB$.

Gráficamente se tiene lo siguiente:

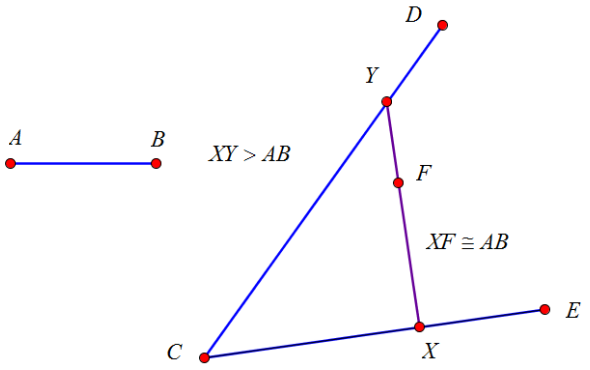

Figura 1.49. Axioma de Aristóteles

1.4. Axioma de paralelismo

Con los axiomas de incidencia, intermediación, congruencia y continuidad permiten desarrollar una geometría el matemático húngaro János Bolyai la llamo **Geometría Absoluta**, hay que resaltar que esta geometría no alcanza a cubrir todos los resultados de geometría presentados

en los Elementos por Euclides. El nombre de “geometría absoluta” es incorrecta ya que no incluye las ideas de detrás de la geometría elíptica y otras geometrías similares.

Los matemáticos W. Prenowitz y M. Jordan sugieren el nombre de **Geometría Neutral** porque al desarrollar tal geometría, ésta se mantiene “neutral” con respecto al último axioma de Hilbert, que históricamente es él más controversial.

Antes de presentar el último axioma de Hilbert recuerda lo siguiente:

Definición: Dadas dos líneas ℓ y ℓ', se dice que ℓ **es paralela a** ℓ' si y sólo si no se intersectan.

Para denotar que dos rectas son paralelas se utiliza el símbolo $\|$, así si ℓ es paralela a ℓ'se denota por $\ell \| \ell'$. Gráficamente se tiene lo siguiente:

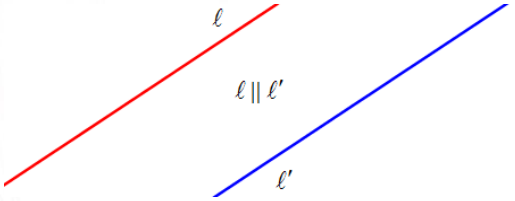

Figura 1.50. Líneas paralelas

Cabe mencionar que ℓ y ℓ' están en el mismo plano ya que claramente en el espacio tridimensional dicha definición carece de sentido, basta tomar dos líneas no coplanares para observar esto, observa también que dicha definición no involucra el concepto de distancia entre dos líneas.

El quinto postulado de Euclides intenta presentar la relación que hay entre una recta y un punto exterior a la misma.

Quinto postulado de Euclides: Para toda línea ℓ y para todo punto P que no pertenezca a ℓ, existe “una y sólo una” línea ℓ' que pasa por P de tal forma que ℓ es paralela a ℓ'.

En la siguiente figura se presenta la idea detrás este postulado:

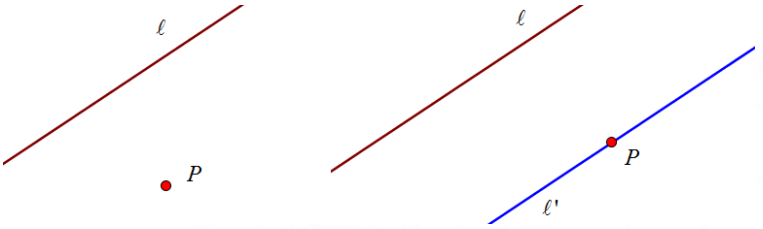

Figura 1.51. Quinto Postulado de Euclides

Y la pregunta inmediata es la siguiente: ¿Por qué resulta controversial dicho postulado?, a simple vista resulta obvio tal hecho en el plano, hay que resaltar que esto sólo es "obvio" si se piensa en el universo euclidiano. Pero si se toma en cuenta que los axiomas de la geometría son abstracciones de la experiencia física, hay una diferencia entre éste y los otros cuatro postulados de Euclides.

Los **primeros dos postulados** son abstracciones de la experiencia de dibujar líneas y puntos, el **tercer postulado** se deriva de dibujar círculos con un compás. El **cuarto postulado** es tal vez menos obvio para la abstracción, éste se deriva de la experiencia de medir ángulos. El **quinto postulado** es diferente en el sentido de que no se puede verificar empíricamente, porque cuando se presenta el dibujo de dos líneas, solo presenta segmentos no las líneas completas, por más que los segmentos sean prolongados nunca son una línea.
El axioma de Hilbert sobre las paralelas es similar al quinto postulado de Euclides, sin embargo, tienen ciertas discrepancias. A continuación, se presenta el axioma de Hilbert sobre líneas paralelas:

Axioma de paralelismo: Para toda línea ℓ y para todo punto P que no pertenezca a ℓ, existe "a lo más" una línea ℓ' que pasa por P de tal forma que ℓ es paralela a ℓ'.

Primero, tienes que observar que el axioma de Hilbert es más débil que el quinto postulado de Euclides, ya que Euclides dice que “hay una y sólo una” y Hilbert dice “a lo más”, la razón por la que Hilbert omite la palabra “única” es porque esto puede ser deducido de los otros axiomas, y en consecuencia no es necesario presentarlo como parte de un axioma. Esta observación es importante, por ejemplo, en la geometría elíptica no existen rectas paralelas y en la geometría hiperbólica hay más de una paralela.

Este último axioma completa la lista de los 16 axiomas de Hilbert para la geometría euclidiana. El plano euclidiano es el modelo de esos axiomas.

Cierre de la unidad

En esta unidad se presentaron los axiomas de Hilbert para la geometría euclidiana, a partir de los axiomas de intermediación donde se obtuvieron algunas propiedades de los segmentos, rayos y ángulos. Posteriormente, se estudiaron los axiomas de congruencia, lo que permite comparar segmentos y ángulos, después se presentó el axioma de continuidad y algunas consecuencias del mismo, y finalmente estudiaste la diferencia que existe entre el axioma de las paralelas de Hilbert y el quinto postulado de Euclides.

Para saber más

Para un estudio de la geometría Euclidiana y la diferencia entre ésta y la geometría no euclidiana puedes consultar el siguiente video:

Inca, Anaya. J. (28 de agosto de 2013). Diferencia entre geometría euclidiana y no euclidiana [Archivo de Vídeo]. YouTube. http://youtu.be/Urmz-C-BQfU.

Para un estudio del desarrollo histórico de los axiomas de Hilbert de la geometría se pueden consultar los siguientes sitios electrónicos:

Corry, L. (2000). David Hilbert and the Axiomatization of Physics (Hilbert's Sixth Problem). Disponible en http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Hilbert%20Kluwer.pdf

"Hilbert's axioms." (s.f.). In Wikipedia. Recuperado el 16 de febrero de 2024, de http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_axioms

Básica

- Courant R., Robbins H, Stewart I. (1996) *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, USA, Oxford University Press.
- Devlin, K. (2000) *The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible*, USA, Holt Paperbacks.
- Eves, H. (1972) *Survey of geometry*, USA, Allyn & Bacon.
- Hartshorne, R. (2005) *Geometry: Euclid and Beyond*, USA, Springer.
- Hilbert D., Cohn-Vossen S. (1999) *Geometry and imagination*, USA, American Mathematical Society.
- Meschkowski, H. (1964) *Noneuclidean Geometry*, USA, Academic Press.